

n° d'inscription
au CNRS

AO 5843

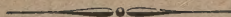
Paris 1970

ÉTUDE DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS INDUITES
D'UN GROUPE DE LIE RÉSOLUBLE EXPONENTIEL

PAR

Michèle VERGNE

Extrait des *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*,
4^e série, t. 3, fasc. 3, 1970.





ÉTUDE DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS INDUITES D'UN GROUPE DE LIE RÉSOLUBLE EXPONENTIEL

PAR MICHÈLE VERGNE

INTRODUCTION.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle nilpotente et G le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Kirillov a montré qu'il existe une correspondance bijective entre l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites de G agissant par la représentation coadjointe dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ et l'espace $\hat{G}$ des classes de représentations unitaires irréductibles de G [6].

Les résultats de Kirillov qui conduisent à cette correspondance sont les suivants :

A. Toute représentation unitaire irréductible de G peut s'obtenir par induction d'un caractère χ d'un sous-groupe H fermé connexe de G ; soit alors $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et f le caractère de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ défini par $d\chi = if$ (on a donc $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$).

Désignons encore par f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant f sur $\mathfrak{h}$, et soit B_f la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. Alors $\mathfrak{h}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f .

B. Pour toute $f \in \mathfrak{g}^*$, notons $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble de sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent soit totalement isotrope maximal pour la forme B_f ; et si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ notons $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation induite à G par le caractère $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe analytique H d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ dont la différentielle $d\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est $if|_{\mathfrak{h}}$.

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe un $\mathfrak{h}$ appartenant à $M(f; \mathfrak{g})$. La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est irréductible et ne dépend pas de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ choisie.

C. On peut donc associer à toute orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ un élément $\rho(O)$ de $\hat{G}$ en posant

$$\rho(O) = \rho(f; h; \mathfrak{g}) \quad \text{pour } f \in O \text{ et } h \in M(f; \mathfrak{g}).$$

L'application ρ est bijective.

Bernat [1] a alors étendu cette correspondance bijective entre $\hat{G}$ et l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ à un groupe G résoluble exponentiel (on dit qu'un groupe G est résoluble exponentiel, s'il est résoluble et simplement connexe et si l'application exponentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans G est un difféomorphisme).

Les résultats de Bernat qui permettent d'établir cette correspondance sont les suivants :

A. reste identique.

Par contre, si $h \in M(f; \mathfrak{g})$, il est bien connu que la représentation $\rho(f; h; \mathfrak{g})$ n'est en général pas irréductible. On notera $I(f; \mathfrak{g})$ le sous-ensemble de $M(f; \mathfrak{g})$ formé des h telles que $\rho(f; h; \mathfrak{g})$ soit irréductible. Alors l'assertion B doit être remplacée par l'assertion suivante :

B'. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe un h appartenant à $I(f; \mathfrak{g})$, et la représentation irréductible $\rho(f; h; \mathfrak{g})$ ne dépend pas de la sous-algèbre h de $I(f; \mathfrak{g})$ choisie.

On associe alors de même à toute orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ un élément $\rho(O)$ de $\hat{G}$, en posant

$$\rho(O) = \rho(f; h; \mathfrak{g}) \quad \text{pour } f \in O \text{ et } h \in I(f; \mathfrak{g}).$$

C est alors identique.

Il se pose alors naturellement le problème de la détermination du sous-ensemble $I(f; \mathfrak{g})$ de $M(f; \mathfrak{g})$, et ceci a été résolu par Pukanszky [9]. Rappelons le résultat.

Si $h \in M(f; \mathfrak{g})$, alors on démontre immédiatement que $H.f$ est un ouvert de $f + h^\perp$ (si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $H.f$ orbite de f par une représentation unipotente du groupe H est aussi fermée d'après un théorème de Rosenlicht, voir [10]); par conséquent, on a $H.f = f + h^\perp$ quelle que soit $h \in M(f; (\mathfrak{g}))$.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky s'énonce ainsi : Soit G un groupe résoluble exponentiel; alors h appartient à $I(f; \mathfrak{g})$ si et seulement si $H.f = f + h^\perp$.

Enfin Pukanszky [8] a aussi montré que si $h \in M(f; \mathfrak{g})$, la représentation $\rho(f; h; \mathfrak{g})$ (non nécessairement irréductible) se décompose cependant en somme finie de représentations irréductibles, sans toutefois préciser cette décomposition.

On déterminera dans cet article la décomposition exacte de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. Énonçons dès à présent le résultat; il s'agit de déterminer les orbites O de G dans $\mathfrak{g}^*$ telles que la représentation $\rho(O)$ intervienne effectivement dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et la multiplicité d'une telle représentation.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky ainsi que l'étude d'exemples simples suggèrent que cette décomposition est en rapport avec l'action du groupe H dans l'espace affine $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. Ceci est bien le cas : Une représentation $\rho(O)$ intervient dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ si et seulement si $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est un ouvert non vide de $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. Le groupe H agit dans $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$. Il est facile de voir alors que chaque orbite de H dans $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est ouverte dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. On démontrera que le nombre $c(O; f; \mathfrak{h})$ de ces orbites est fini et est égal à la multiplicité de la représentation $\rho(O)$ dans la décomposition $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$.

Cette multiplicité peut être strictement plus grande que 1 comme le montrera l'exemple de la fin de l'article, et contrairement à ce qui avait été un peu trop rapidement conjecturé dans [11].

Enfin nous n'utiliserons dans cet article que les résultats de la thèse de Bernat, et par conséquent un intérêt non négligeable sera de retrouver le critère d'irréductibilité de Pukanszky.

I. — Résultats généraux.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif. Soit B une forme bilinéaire alternée sur V et soit $N(B)$ son noyau, c'est-à-dire

$$N(B) = \{x \in V; B(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in V\}.$$

Soit $\tilde{B}: V \rightarrow V^*$ l'application de V dans son dual définie par $\tilde{B}(x)(y) = B(y, x)$.

Si W est un sous-espace de V , on notera $W^\perp$ l'orthogonal de W dans V^* , c'est-à-dire

$$W^\perp = \{\varphi \in V^*; \varphi(w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}$$

et W^B l'orthogonal de W dans V par rapport à la forme B , c'est-à-dire

$$W^B = \{x \in V; B(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

On vérifie immédiatement les formules suivantes :

- (a) $\text{Ker } \tilde{B} = N(B), \quad \text{Im } \tilde{B} = N(B)^\perp;$
- (b) $\dim W^B = \dim V - \dim W + \dim(W \cap N(B)),$
- (c) $(W^B)^B = W + N(B);$
- (d) $\tilde{B}(W) = (W^B)^\perp.$

On dit que W est un sous-espace totalement isotrope si la restriction de B à W est identiquement nulle. Alors W est un sous-espace totalement isotrope maximal si et seulement si $W = W^B$, ou encore si et seulement si W est totalement isotrope et si $\dim W = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B))$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et f un point de $\mathfrak{g}^*$. Soit B_f la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. On a alors

$$N(B_f) = \mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; f([X, Y]) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$$

et $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on notera W^f l'orthogonal de W par rapport à la forme B_f . Si W est un idéal de $\mathfrak{g}$, W^f est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on notera $X.f$ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$(X.f)(Y) = -f([X, Y]) = \tilde{B}_f(X).$$

Si donc W est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et si $W.f$ désigne l'espace vectoriel des formes $X.f$ ou $X \in W$, on a d'après la formule (d),

$$(e) \quad W.f = (W^f)^\perp.$$

On notera $S(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{h}$ soit totalement isotrope pour B_f , c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$, on dira que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée à f . On notera $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{h}$ soit totalement isotrope maximal pour la forme B_f ; c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ et telle que

$$\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)).$$

PROPOSITION 1. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$. Alors :

1° B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $\tilde{B} : \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ qui met en dualité $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_0$ -modules de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et de $(\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$.

2° On a quel que soit $H_0 \in \mathfrak{h}_0$,

$$\text{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \text{ ad } H_0 = \frac{1}{2}(\text{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h} \text{ ad } H_0 - \text{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h}' \text{ ad } H_0).$$

3° $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — Comme $f([h_0, a]) = f([h, h \cap a]) = 0$ B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B : h/h_0 \times a/h \cap a \rightarrow \mathbf{R}$.

Or si $H \in h$ est tel que $B_f(H, a) = 0$, alors $H \in h \cap a^f = h_0$; de même, si $A \in a$ est tel que $B_f(A, h) = 0$, alors $A \in h^f \cap a = h \cap a$. B est donc une dualité.

Les espaces h/h_0 et $a/h \cap a$ sont tous deux munis d'une structure de h_0 -modules. Soit $H \in h$ et $A \in a$ et h et a les images de H et A dans h/h_0 et $a/h \cap a$, alors

$$\begin{aligned} B(H_0, h, a) + B(h, H_0, a) &= f([H_0, H], A) + f([H, [H_0, A]]) \\ &= f([H_0, [H, A]]) = 0, \\ \text{car } H_0 &\in a^f \quad \text{et} \quad [H, A] \in a. \end{aligned}$$

On a donc démontré le 1^o et ceci prouve, en particulier, que

$$\dim a - \dim h \cap a = \dim h - \dim h_0$$

et que

$$\text{Tr}_{h/h_0} \text{ad } H_0 = -\text{Tr}_{a/h \cap a} \text{ad } H_0 \quad \text{si } H_0 \in h_0.$$

Montrons que $h' \in M(f; g)$; il est clair que $h' \in S(f; g)$.

D'autre part,

$$\dim h' = \dim h_0 + \dim a - \dim h_0 \cap a.$$

Or, comme $a \subset a^f$,

$$h_0 \cap a = h \cap a.$$

Il vient donc

$$\dim h = \dim h' \quad \text{et} \quad h' \in M(f; g).$$

Il reste à prouver 2^o.

Les h_0 -modules $h'/h_0 = h_0 + a/h_0 \simeq a/h_0 \cap a = a/h \cap a$ sont canoniquement isomorphes. On a donc

$$\text{Tr}_{h'/h_0} \text{ad } H_0 = \text{Tr}_{a/h \cap a} \text{ad } H_0 = -\text{Tr}_{h/h_0} \text{ad } H_0,$$

or

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{h/h_0} \text{ad } H_0 &= \text{Tr}_{h/h} \text{ad } H_0 + \text{Tr}_{h/h_0} \text{ad } H_0 \\ &= \text{Tr}_{h/h'} \text{ad } H_0 + \text{Tr}_{h'/h_0} \text{ad } H_0. \end{aligned}$$

Par soustraction, on obtient l'égalité cherchée.

Soit $f \in g^*$. On note $i(f; g)$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f . Si k est une sous-algèbre de g , on se permettra de noter $i(f; k)$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la restriction de la forme B_f à k .

LEMME 1. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, alors

$$i(f; \mathfrak{g}) = i(f; \mathfrak{a}^f).$$

En effet, soit W un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f restreinte à $\mathfrak{a}^f$.

On a $\mathfrak{a} \subset W$, car $\mathfrak{a} + W$ est un sous-espace totalement isotrope. Il s'agit de prouver que W est un sous-espace totalement isotrope maximal dans $\mathfrak{g}$. Or ceci est évident, car si $x \in W^f$, alors $x \in \mathfrak{a}^f$ et donc $x \in W$.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G opère dans $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la représentation coadjointe. Si $g \in G$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on notera $g.f$ le transformé de f par g et on notera $O(f)$ l'orbite de f sous G . La différentielle de l'application $g \rightarrow g.f$ de G dans $\mathfrak{g}^*$ est l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ défini par $X \rightarrow X.f$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$ et si H est le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, il est clair que $H.f \subset f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 2. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, alors $H.f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$.

Démonstration. — Comme l'espace affine $f + \mathfrak{h}^\perp$ est stable sous l'action de H , il suffit de démontrer que $H.f$ contient un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$. Considérons l'application différentielle à l'origine de l'application $a \rightarrow a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$, c'est l'application $H \rightarrow H.f$. L'image $\mathfrak{h}.f$ de $\mathfrak{h}$ par cette application est égale à $(\mathfrak{h}^f)^\perp$ [formule (e)], donc à $\mathfrak{h}^\perp$. Par conséquent, $H.f$ contient un voisinage de f dans $f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 3. — Soit $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
- (2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$;
- (3) Quel que soit φ appartenant à $\mathfrak{h}^\perp$, alors $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Démonstration (Duflo). (Cette proposition avait été démontrée par Pukanszky [9] dans le cas où $\mathfrak{g}$ était une algèbre résoluble exponentielle.)

(1) $\Rightarrow$ (2) : Il est clair que (1) entraîne la première assertion de (2). Il suffit donc de démontrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^f$. Considérons l'application $a \rightarrow a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Elle est surjective par hypothèse. Il existe donc au moins un point h_0 de H tel que la différentielle de cette application au point h_0 soit surjective (théorème de Sard, voir [3]). L'application $X \rightarrow X.(h_0.f)$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}^\perp$ est donc surjective. Or $\mathfrak{h}.(h_0.f) = (\mathfrak{h}^{h_0.f})^\perp$ [formule (e)]. On a donc $\mathfrak{h}^{h_0.f} = \mathfrak{h}$; et $\mathfrak{h}$ étant stable par h_0 on obtient $\mathfrak{h}^f = \mathfrak{h}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : En effet, soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, alors $\mathfrak{h} \in S(f + \varphi; \mathfrak{g})$. Il suffit donc de démontrer que $\dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f)$. Or $f + \varphi = g.f$, avec $g \in G$, on a donc

$$\mathfrak{g}(f + \varphi) = g.\mathfrak{g}(f) \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) : En effet, si (3) est vérifiée, d'après la proposition 2 toutes les orbites du plan $f + \mathfrak{h}^\perp$ par le groupe H sont ouvertes dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ et donc $H.f$ est à la fois ouvert et fermé dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ et donc égal à $f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 4. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Notons $U(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui rencontrent $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert non vide de $f + \mathfrak{h}^\perp$, et notons $V(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de la forme $O = O(f + \varphi)$, où $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Alors $U(f; \mathfrak{h}) = V(f; \mathfrak{g})$.

D'autre part, si $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et si $f + \varphi$ ($\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$) est un point de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors la composante connexe de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ contenant $f + \varphi$ est égale à $H.(f + \varphi)$.

Démonstration (Duflo). Montrons que $V(f; \mathfrak{h}) \subset U(f; \mathfrak{h})$. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ tel que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$. Alors

$$f + \varphi \in O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp,$$

donc $E = O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp$ est non vide, il s'agit de montrer que E est ouvert dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Soit $f + \varphi' \in E$, donc $\varphi' \in \mathfrak{h}^\perp$ et $f + \varphi' \in O(f + \varphi)$; par suite,

$$\mathfrak{h} \in S(f + \varphi'; \mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}(f + \varphi') = \dim \mathfrak{g}(f + \varphi),$$

par conséquent, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi'; \mathfrak{g})$. Donc, d'après la proposition 2, $H.(f + \varphi') \subset E$ est ouvert dans $f + \mathfrak{h}^\perp$, d'où l'inclusion souhaitée.

Montrons que $U(f; \mathfrak{h}) \subset V(f; \mathfrak{h})$.

Soit $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et soit

$$U_1 = \{ \varphi \in \mathfrak{h}^\perp, \text{ telles que } \dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f) \}.$$

La dimension de $\mathfrak{g}(f)$ est égale à la dimension minimale des dimensions de $\mathfrak{g}(f + \varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ car $\mathfrak{h} \in S(f + \varphi; \mathfrak{g})$ quel que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$. Donc U_1 est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{h}^\perp$ non vide et par conséquent dense dans $\mathfrak{h}^\perp$. Il s'ensuit que l'ensemble $f + U_1$ rencontre $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ en au moins un point $f + \varphi_1$, et donc $O = O(f + \varphi_1)$ appartient à $V(f; \mathfrak{h})$.

Enfin, soient $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et $f + \varphi$ un point ($\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$) un point de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$. Soit C la composante connexe de l'ouvert $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ contenant $f + \varphi$. C est stable sous l'action de H et pour tout point $f + \varphi'$ de C , $H.(f + \varphi')$ est un ouvert connexe de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, donc de C . Alors $H.(f + \varphi)$ est un

ouvert de C , dont le complémentaire dans C est réunion de H -orbites ouvertes. Par conséquent, $H.(f + \varphi)$ est ouvert et fermé dans C et, par suite, égal à C .

PROPOSITION 5. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, alors $f + (\mathfrak{a}')^\perp \subset O(f)$.

Démonstration. — Comme $\mathfrak{a}$ est abélien, si $A \in \mathfrak{a}$, on a $\exp A.f = f + A.f$. Donc

$$\exp \mathfrak{a}.f = f + \mathfrak{a}.f = f + (\mathfrak{a}')^\perp.$$

II. — Sous-algèbres subordonnées dans une algèbre résoluble exponentielle.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle et V un $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie; $V^{\mathbb{C}}$ est alors complètement réductible en tant que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ -module. Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \dots \subset V_n = V^{\mathbb{C}},$$

avec $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ -module $V^{\mathbb{C}}$. A chaque quotient irréductible de dimension 1, V_{i+1}/V_i , correspond une forme linéaire λ_i sur $\mathfrak{g}$ à valeurs complexes. Ces formes linéaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}$ sont indépendantes à l'ordre près de la suite de Jordan-Hölder choisie et sont appelées les poids de $\mathfrak{g}$ dans V . On appelle racines de $\mathfrak{g}$ les poids de la représentation adjointe.

DÉFINITION 1. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V . On dit que V est un $\mathfrak{g}$ -module de type exponentiel, si quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ n'a jamais de valeurs propres imaginaires pures non nulles.

Il est clair que si V est un $\mathfrak{g}$ -module de type exponentiel et si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est un poids de $\mathfrak{g}$ dans V la partie imaginaire μ_2 de μ doit être proportionnelle à la partie réelle μ_1 . Il revient donc au même de dire que V est un $\mathfrak{g}$ -module de type exponentiel si et seulement si les poids de $\mathfrak{g}$ dans V sont de la forme $(1 + i\alpha)\psi$, où ψ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$.

DÉFINITION 2. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre résoluble exponentielle si la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est de type exponentiel ou encore si les racines de $\mathfrak{g}$ sont de la forme $\lambda(1 + i\alpha)$, où λ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ et α un nombre réel.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle.

PROPOSITION 6 (Dixmier [4]). — Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathfrak{g}$ est une algèbre résoluble exponentielle;
- (2) $\exp$ est un difféomorphisme.

• Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on sait que le sous-groupe analytique H de G correspondant à $\mathfrak{h}$ est fermé et simplement connexe [5].

D'autre part, il est clair que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre d'une algèbre résoluble exponentielle, $\mathfrak{h}$ est une algèbre exponentielle. On obtient donc la :

PROPOSITION 7. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre d'une algèbre exponentielle $\mathfrak{g}$. Alors $\exp$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ sur H .*

LEMME 2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Si A et $B \in \mathfrak{g}$, il existe C et C' appartenant à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tels que*

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) \exp C = \exp C' \exp(A + B).$$

Démonstration. — Le groupe $[G, G]$ des commutateurs de G est un groupe analytique d'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'après la proposition 7, on a donc

$$[G, G] = \exp([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]).$$

Soient $\pi : G \rightarrow G/[G, G]$ et $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ les morphismes canoniques. Ils commutent à l'application exponentielle, et donc, le groupe $G/[G, G]$ étant commutatif,

$$\pi(\exp(A + B)) = \exp(pA + pB) = \exp pA \exp pB = \pi(\exp A \exp B),$$

donc

$$\exp A \exp B \exp(-(A + B)) \in [G, G] = \exp[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et (M, ρ) un $\mathfrak{g}$ -module de type exponentiel irréductible. Alors $\dim M \leq 2$.

Si $\dim M = 2$, il existe un vecteur A de $M^{\mathbb{C}}$, une forme linéaire λ réelle non nulle sur $\mathfrak{g}$ et un nombre réel α non nul tels que

$$\begin{aligned} M^{\mathbb{C}} &= \mathbf{C}A \oplus \mathbf{C}\bar{A} \quad \text{et} \quad \rho(X)A = (1 + i\alpha)\lambda(X)A \quad \text{si } X \in \mathfrak{g}, \\ \rho(X)\bar{A} &= (1 - i\alpha)\lambda(X)\bar{A} \end{aligned}$$

Le noyau de la représentation ρ est donc égal au noyau de la forme réelle λ , il est donc de codimension 1.

LEMME 3. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, (M, ρ) un $\mathfrak{g}$ -module de type exponentiel irréductible et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors la restriction de ρ à $\mathfrak{h}$ est, soit triviale, soit irréductible et son noyau est de codimension ≤ 1 .*

En effet, si $\dim M = 1$, le lemme est évident. Si $\dim M = 2$ et si $\lambda|_{\mathfrak{h}} = 0$, $\rho|_{\mathfrak{h}}$ est triviale, sinon $\rho|_{\mathfrak{h}}$ est irréductible.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, on dit qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est central si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, ou encore si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$.

LEMME 4. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle, α un idéal non central minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$. Alors α est abélien et $\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha \leq 2$.

Démonstration. — Le $\mathfrak{g}$ -module $\alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha$ est irréductible. Donc

$$\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha \leq 2 \quad \text{et} \quad [\alpha, \alpha] \subset \mathfrak{z} \cap \alpha.$$

Si $\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha = 1$, le lemme est évident. Si $\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha = 2$, $\alpha^{\mathfrak{g}}$ est engendré sur $(\mathfrak{z} \cap \alpha)^{\mathfrak{g}}$ par deux vecteurs A et $\bar{A}$ et il existe une forme linéaire λ non nulle et un nombre réel α non nul tel que, si $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} [X, A] &= (1 + i\alpha) \lambda(X) A + U, \\ [X, \bar{A}] &= (1 - i\alpha) \lambda(X) \bar{A} + \bar{U}, \end{aligned} \quad \text{où } U \in (\mathfrak{z} \cap \alpha)^{\mathfrak{g}},$$

il s'agit de montrer que $[A, \bar{A}] = 0$. Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $\lambda(X_0) = 1$. On a alors

$$0 = [X_0, [A, \bar{A}]] = (1 + i\alpha) [A, \bar{A}] + (1 - i\alpha) [A, \bar{A}] = 2[A, \bar{A}].$$

Désormais dans ce chapitre II $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

LEMME 5. — Soient α un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Alors

$$\dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha \leq 2 \quad \text{et si} \quad \dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha = 2, \quad \text{alors} \quad \mathfrak{h} \cap \alpha = \mathfrak{z} \cap \alpha$$

et la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ est irréductible.

Si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. On a donc $\alpha \supset \mathfrak{h} \cap \alpha \supset \mathfrak{z} \cap \alpha$. Or $\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha \leq 2$ et donc $\dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha \leq 2$, l'égalité n'étant possible que si $\mathfrak{h} \cap \alpha = \mathfrak{z} \cap \alpha$.

PROPOSITION 8. — Soient α un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Soient σ la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ et $\mathfrak{i}$ son noyau et soit $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \alpha^f$. Alors :

- (a) la représentation σ est triviale ou irréductible;
- (b) $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i} + \mathfrak{h}_0$ sont des idéaux de $\mathfrak{h}$;
- (c) $\mathfrak{i} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ ou $\mathfrak{h}_0$, cette dernière éventualité étant exclue si $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$;
- (d) $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h}_0$.

Démonstration. — On a $\dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha \leq 2$. Si $\dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha = 1$, (a) est clair. Si $\dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha = 2$, (a) résulte des lemmes 5 et 3.

Dans tous les cas $\mathfrak{i}$ est de codimension ≤ 1 et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{i}$, ce qui montre (b).

Montrons (c). Si $\mathfrak{h}_0 \not\subset \mathfrak{i}$, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i}$. Si $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i}$ et si $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 1$, on a $\mathfrak{i} = \mathfrak{h}_0$ ou $\mathfrak{h}$. Reste le cas $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i}$ et $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$. Alors $\mathfrak{h}_0 \neq \mathfrak{i}$ puisque $\mathfrak{i}$ est de codimension ≤ 1 , et il s'agit de prouver que $\mathfrak{i} = \mathfrak{h}$. Supposons donc $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{h}$, σ est alors irréductible d'après (a). Rappelons (prop. 1) que B met $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ en dualité.

L'orthogonal pour B de $\mathfrak{i}/\mathfrak{h}_0$ est l'image dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ du sous-espace $\mathfrak{a}(\mathfrak{i}) = \{A \in \mathfrak{a}, f([A, \mathfrak{i}]) = 0\}$ et $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i} \subset \mathfrak{h}$ implique par dualité $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{i}) \subset \mathfrak{a}$. Il suffit dès lors de montrer que $\mathfrak{a}(\mathfrak{i})$ est un $\mathfrak{h}$ -module pour obtenir la contradiction cherchée.

Soient donc $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{i})$, $J \in \mathfrak{i}$ et $H \in \mathfrak{h}_0$, on a

$$f([J, [H, A]]) = f([J, H], A) + f[H, [J, A]],$$

or $[J, H] \in \mathfrak{i}$ et le 1^{er} terme du 2^e membre est donc nul, car $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{i})$.

D'autre part, $[J, A] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ car $\mathfrak{i}$ est le noyau de la représentation σ le 2^e terme est donc nul aussi, puisque $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Montrons (d). Il suffit de démontrer que $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{a}$, or

$$[[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}], \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{i}, [\mathfrak{i}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{i}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}],$$

on a donc $f[[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}], \mathfrak{a}] = 0$.

III. — Comparaison de représentations induites par des sous-algèbres subordonnées à une forme f .

Soit G un groupe de Lie; désignons par dg une mesure de Haar à gauche sur G et par Δ_G la fonction module de G de sorte que l'on a

$$\int_G f(gx^{-1}) dg = \Delta_G(x) \int_G f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$ espace des fonctions numériques continues à support compact sur G et pour tout $x \in G$.

Soit H un sous-groupe fermé de G. On désigne par $\Delta_{H,G}$ le caractère de H à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ défini par $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$.

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, on a $\Delta_{H,G}(\exp X) = e^{\text{Tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ ad } X}$.

Soit $\mathcal{K}(H, G)$ l'espace des fonctions numériques continues sur G à support compact modulo H et qui vérifient

$$(R.1) \quad \Phi(gh) = \Delta_{H,G}(h) \Phi(g) \quad (g \in G, h \in H),$$

G agit dans cet espace par translation à gauche.

On sait [2] qu'il existe sur $\mathcal{K}(H, G)$ une forme linéaire positive G -invariante et une seule (à un scalaire près). On la note $\nu_{H, G}$ et on posera

$$\nu_{H, G}(F) = \oint_{G/H} F(g) d\nu_{H, G}(g).$$

Dans le cas où Δ_H et Δ_G coïncident sur H (par exemple si H est distingué dans G), l'espace $\mathcal{K}(H, G)$ s'identifie à $\mathcal{K}(G/H)$ et il existe alors une mesure G -invariante sur l'espace homogène G/H qu'on notera parfois $d\dot{g}$.

Soit U une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit F une fonction continue de G à valeurs dans $\mathcal{H}$ à support compact modulo H et vérifiant

$$(R.2) \quad F(gh) = U(h)^{-1} (\Delta_{H, G}(h))^{\frac{1}{2}} F(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

Alors la fonction $g \rightarrow \|F(g)\|^2$ appartient à $\mathcal{K}(H, G)$ et on pose

$$\|F\|^2 = \oint_{G/H} \|F(g)\|^2 d\nu_{H, G}(g).$$

On réalisera la représentation unitaire $\text{Ind}_H^G U$ induite à G de la représentation unitaire U du groupe H dans l'espace de Hilbert complété de l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathcal{H}$ à support compact modulo H vérifiant (R. 2) et muni de la norme définie ci-dessus. La représentation unitaire de G dans cet espace s'effectue par translation à gauche.

Désormais dans ce chapitre et le suivant $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle, et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à f . On notera $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ le caractère unitaire du groupe $H = \exp \mathfrak{h}$ défini par $\chi_{f, \mathfrak{h}}(\exp X) = e^{i f(X)}$

pour $X \in \mathfrak{h}$ et on notera $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation $\text{Ind}_H^G \chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe G . Elle se réalise donc par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ complété de l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathbf{C}$ à support compact modulo H et vérifiant

$$(R.3) \quad f(gh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, G}(h)^{\frac{1}{2}} f(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à f contenue dans $\mathfrak{k}$, on se permettra de noter $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ la représentation $\text{Ind}_H^{\mathfrak{k}} \chi_{f, \mathfrak{h}}$.

Il s'agira dans la suite de comparer aux représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2 \in M(f; \mathfrak{g})$ et pour cela de fabriquer un opérateur $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$ d'entrelacement de ces représentations. Donnons une idée

non rigoureuse de la méthode employée. Il s'agit de trouver un opérateur qui transforme une fonction vérifiant (R. 3) pour $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ en une fonction vérifiant (R. 3) pour H_2 . Supposons pour simplifier que tous les groupes en question soient unimodulaires. Soit $g \in G$ et $\varphi \in \mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, alors la fonction

$$h_2 \rightarrow \varphi(gh_2) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h_2) \quad (h_2 \in \exp \mathfrak{h}_2 = H_2) \quad .$$

est invariante à droite par le sous-groupe $H_1 \cap H_2$ de H_2 .

Posons formellement

$$(R.4) \quad (T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} \varphi)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \varphi(gh_2) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h_2) d\dot{h}_2,$$

où $d\dot{h}_2$ désigne une mesure H_2 -invariante sur l'espace homogène $H_2/H_1 \cap H_2$. Si cette intégrale converge quel que soit g , il est clair que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} \varphi$ vérifie (R. 3) pour H_2 et que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$ commute à l'action de G par translations à gauche.

Dans la situation tout à fait générale décrite plus haut on ne connaît aucun résultat sur la convergence des intégrales (R. 4). Cependant on montrera que dans des cas très particuliers d'algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$, on peut effectivement définir de cette façon un opérateur $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$.

On gardera dans la suite les notations de la proposition 8 et de la proposition 1.

LEMME 6. — Soit $\mathfrak{v}$ un supplémentaire de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ et l'application $(H, V) \rightarrow \exp H \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ sur $\exp \mathfrak{k}$.

Démonstration. — Soit φ cette application; on sait qu'elle est analytique; montrons qu'elle est bijective. Notons $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, $H = \exp \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{k}$, on a $K = H.A$ et $A = \exp \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \exp \mathfrak{v}$. Donc $K = H \exp \mathfrak{v}$ et φ est surjective.

Soient, par ailleurs, $(H_i, V_i) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ ($i = 1, 2$) tels que

$$\exp H_1 \exp V_1 = \exp H_2 \exp V_2.$$

Alors $\mathfrak{a}$ étant abélien et $\mathfrak{h}$ exponentielle, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\exp(V_2 - V_1) = \exp H_1 (\exp H_2)^{-1} = \exp H_3.$$

L'application $\exp$ étant bijective, on en déduit que

$$V_2 - V_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{v} = 0 \quad \text{et donc que} \quad (H_1, V_1) = (H_2, V_2).$$

Il reste à vérifier que φ^{-1} est analytique. Posons pour $k \in K$

$$\varphi^{-1}(k) = (L(k), M(k))$$

de sorte que $k = \exp L(k) \exp M(k)$, $L(k) \in \mathfrak{h}$, $M(k) \in \mathfrak{v}$. Or l'application canonique $\pi: G \rightarrow H \setminus G$, qui est analytique s'écrit, si on identifie $H \setminus G$ à $\exp \mathfrak{v}$, $k \rightarrow \exp M(k)$. Par suite, l'application M est analytique et ceci entraîne immédiatement que L est analytique.

LEMME 7. — (a) Supposons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ et soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{h}$ contenu dans $\mathfrak{j}$. Alors l'application $(T, H_0) \rightarrow \exp T \exp H_0$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ sur H .

(b) Supposons $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$. Soit $X \in \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0$, alors l'application

$$(t, H_0) \rightarrow \exp t X \exp H_0$$

est un difféomorphisme de $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0$ sur H .

Démonstration. — Si $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$ et l'assertion (b) est classiquement vérifiée. Supposons donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ et notons φ l'application considérée.

On sait qu'elle est analytique et il suffit de vérifier qu'elle est bijective : le raisonnement fait au lemme 6 prouvera que φ^{-1} est analytique.

Soit $(T_i, H_i) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ ($i = 1, 2$) tels que

$$\exp T_1 \exp H_1 = \exp T_2 \exp H_2.$$

Alors, d'après le lemme 2 et le (d) de la proposition 8, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp (T_1 - T_2) = \exp H_3.$$

Donc $T_1 - T_2 \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_0 = \{0\}$ et φ est injective. Posons

$$H_0 = \exp \mathfrak{h}_0, \quad J = \exp \mathfrak{j}, \quad T = \exp \mathfrak{t}.$$

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$, que $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{j}$ un idéal de $\mathfrak{h}$, on a $H = H_0 \cdot J$. Pour démontrer que φ est surjective, il suffit de vérifier que

$$J = \exp (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}, \quad \text{car alors} \quad H = H_0 \exp \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} \cdot T = H_0 \cdot T$$

et pour cela de vérifier que $\exp (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}$ qui engendre J , car $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{t}$, est un sous-groupe. Soient donc

$$(H_i, T_i) \in (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \times \mathfrak{t} \quad (i = 1 \text{ ou } 2).$$

On a

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_1 \exp (\exp T_1 \cdot H_2) \exp T_1 \exp T_2.$$

Or $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ est un idéal dans $\mathfrak{j}$ d'après le (d) de la proposition 8, donc $\exp T_1 \cdot H_2 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ et il existe $H_3 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp H_1 \exp (\exp T_1 \cdot H_2) = \exp H_3.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe $H_4 \in [\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp T_1 \exp T_2 = \exp H_4 \exp (T_1 + T_2).$$

Si on note H_5 l'élément de $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp H_5 = \exp H_3 \exp H_4,$$

on obtient que

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_5 \exp (T_1 + T_2)$$

et ainsi appartient à $\exp \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0 \exp \mathfrak{t}$.

PROPOSITION 9. — Soit α un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \in M(f/\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{h}$ contenu dans $\mathfrak{j}$ et soit $\mathfrak{v}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$. Alors :

- (1) la restriction B de B_f à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée;
- (2) l'application $(T, H_0, V) \rightarrow \exp T \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur K ;
- (3) les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; k)$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; k)$ sont équivalentes.

Comme le sous-espace $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ s'identifie à $\mathfrak{t}$ et $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ à $\mathfrak{v}$, le (1) résulte du (1) de la proposition 1.

Par ailleurs, les lemmes 6 et 7 impliquent (2) et on en déduit facilement que l'application $(H_0, V) \rightarrow \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur H' .

Démontrons que les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; k)$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; k)$ sont équivalentes et pour cela nous allons démontrer qu'on peut construire un opérateur d'entrelacement $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ de ces deux représentations en suivant la méthode esquissée plus haut.

Soit ψ une fonction continue à support compact modulo H appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; k)$. On a donc

$$(R. 3) \quad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, K}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \quad (k \in K, h \in H).$$

Soit $k \in K$ et soit $\Phi_{k, \psi}$ la fonction continue sur H' définie par

$$\Phi_{k, \psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f, \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H', K}(h')^{-\frac{1}{2}}.$$

Le groupe $H \cap H'$ est égal au groupe $\exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}') = \exp \mathfrak{h}_0 = H_0$ et on a

$$\begin{aligned} \Delta_{H_0, H'}(\exp X) &= e^{\text{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \text{ad} X} \quad (X \in \mathfrak{h}_0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\text{Tr} k/\mathfrak{h} \text{ad} X - \text{Tr} k/\mathfrak{h}' \text{ad} X)} \\ &= (\Delta_{H, K}(\exp X))^{\frac{1}{2}} (\Delta_{H', K}(\exp X))^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après le (2) de la proposition 1.

En utilisant ce résultat et la relation (R. 3), on voit donc que la fonction $\Phi_{k,\psi}$ vérifie la relation (R. 1), c'est-à-dire

$$(\Phi_{k,\psi})(h'h_0) = \Delta_{H_0, H'}(h_0) \Phi_{k,\psi}(h').$$

D'autre part, comme $K = H' \cdot H$, l'application canonique $K \rightarrow K/H$ induit une surjection $H' \rightarrow K/H$, qui fait de K/H un espace homogène de H' , d'où un difféomorphisme $\lambda: H'/H_0 \rightarrow K/H$. Le support de ψ modulo H étant compact, on voit que le support de $\Phi_{k,\psi}$ est compact modulo H_0 . La fonction $\Phi_{k,\psi}$ appartient donc à l'espace $\mathcal{H}(H_0, H')$ et on pose

$$(T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \psi)(k) = \nu_{H_0, H'}(\Phi_{k,\psi}) = \oint_{H'/H_0} \psi(kh') \chi_{f, \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H', K}(h')^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_0, H'}(h').$$

Il est clair que la fonction $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ vérifiée la relation (R. 3) pour (K, H') et que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ commute à l'action de G par translations à gauche. Il s'agit de montrer que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ défini sur l'espace des fonctions de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ continues à support compact modulo H se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

L'espace H'/H_0 s'identifie à $\mathfrak{v}$ et l'espace $\mathcal{H}(H_0, H')$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(\mathfrak{v})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathfrak{v}$ par l'application $(P\Phi)(V) = \Phi(\exp V)$ et la forme $\nu_{H_0, H'}$ s'identifie à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{v}$.

D'autre part, si $h' \in \exp \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ étant un idéal de $\mathfrak{k}$ contenu dans $\mathfrak{h}'$ on a $\Delta_{H', K}(h') = 1$ et donc

$$(T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \psi)(k) = \int_{\mathfrak{v}} \psi(k \exp V) e^{if(V)} dV.$$

L'espace K/H s'identifie à $\mathfrak{v}$, et l'application R définie par $(R\psi)(V) = \psi(\exp V)$, où ψ est une fonction continue appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et V un point de $\mathfrak{v}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$. De même, K/H' s'identifie à $\mathfrak{t}$ et l'application R' défini par $(R'\psi')(T) = \psi'(\exp T)$, où ψ' est une fonction continue appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et T un point de $\mathfrak{t}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$.

Soit donc Φ une fonction continue à support compact sur $\mathfrak{v}$. Alors $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)$ vérifiant (R. 3) pour (H', K) , soit $R' \cdot T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \cdot R^{-1}(\Phi)$ la fonction sur $\mathfrak{t}$ définie par

$$(R' \cdot T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \cdot R^{-1})(\Phi)(T) = T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)(\exp T)$$

ou encore

$$(R' \cdot T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \cdot R^{-1}) (\Phi) (T) = \int_{\mathfrak{v}} (R^{-1} \Phi) (\exp T \exp V) e^{if(V)} dV;$$

or

$$\exp T \exp V = \exp (\exp T \cdot V) \exp T$$

et

$$\exp T \cdot V = V + [T, V] + W \quad \text{où} \quad [T, V] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$$

et

$$W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{a}, \quad \text{car} \quad T \in \mathfrak{j} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{j}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

En utilisant les faits suivants :

$\Delta_{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{j}$ (car $[\mathfrak{j}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$), $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}$ sont contenus dans $\mathfrak{j}$, $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien et $R^{-1} \Phi$ vérifie la relation (R.3), il vient

$$(R^{-1} \Phi) (\exp T \exp V) = \Phi (V) e^{-if([T, V])} e^{-if(T)},$$

et

$$(R' \cdot T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \cdot R^{-1}) (\Phi) (T) = e^{-if(T)} \int_{\mathfrak{v}} \Phi (V) e^{if(V)} e^{-if(B_f(T, V))} dV.$$

Comme la restriction B de B_f à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée, B_f définit une transformation de Fourier $\mathcal{F}_B$ de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$ et on a donc

$$(R' \cdot T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \cdot R^{-1}) (\Phi) (T) = e^{-if(T)} \mathcal{F}_B(V \rightarrow e^{if(V)} \Phi(V)).$$

Si $\psi = R^{-1} \Phi$, on voit donc que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$. Cela termine la démonstration de la proposition 9.

PROPOSITION 10. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.

Définissons $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}', \mathfrak{k}, \mathfrak{j}$ comme précédemment.

Supposons que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Dans ces conditions :

(1) $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\dim \mathfrak{h} / \mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a} / \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{h}'$ sont des idéaux de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{a}$, et $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{a}$.

(2) Il existe des vecteurs $H \in \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h}_0$ et $A \in \mathfrak{a} - (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$ tels que

$$\mathfrak{k} = \mathbf{R}H \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbf{R}A,$$

$[H, A] = A$ et $f(A) = 1$. L'application $(x, H_0, y) \rightarrow \exp x H \exp H_0 \exp y A$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathbf{R}$ sur $\mathfrak{K}$.

(3) Si on note pour tout $\nu \in \mathbf{R}$, f_ν la forme linéaire sur $\mathfrak{k}$ définie par les conditions $f_\nu \in f + \mathfrak{h}^\perp$ et $f_\nu(A) = \nu$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp x H f_\nu = f_{e^{-x}\nu}$.

En outre, $h' \in M(f_v; k)$ si et seulement si $v \neq 0$, et $k \in M(f_0; k)$.

(4) Si v_+ est un nombre réel strictement positif et v_- un nombre réel strictement négatif, alors

$$\rho(f; h; k) \simeq \rho(f_{v+}; h'; k) \oplus \rho(f_{v-}; h'; k).$$

Démonstration. — Comme $h = h_0 + i$, d'après le (c) de la proposition 8, on a donc

$$h_0 = i, \quad \dim h/h_0 = \dim a/h \cap a = 1.$$

Comme $h \neq i$, la représentation de h dans $a/h \cap a$ n'est pas triviale, *a fortiori* celle de h dans $a/\mathfrak{z} \cap a$. Elle est donc irréductible d'après le lemme 3. L'espace $h \cap a/\mathfrak{z} \cap a$ étant un sous- h -module propre de $a/\mathfrak{z} \cap a$, on a donc $h \cap a = \mathfrak{z} \cap a$. D'autre part, comme $h_0 = i$, h_0 est un idéal de h et comme $[i, a] \subset h \cap a \subset h_0$, h_0 est un idéal de k . De même, $h' = h_0 + a$, somme de deux idéaux est un idéal de k . On a donc démontré (1).

Soient alors $H_1 \in h - h_0$ et $A_1 \in a - a \cap h$. On a

$$[\Pi_1, \Lambda_1] = \lambda_1 A_1 + U_1 \quad \text{où} \quad U_1 \in a \cap h - \mathfrak{z} \cap a \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Il suffit alors de prendre $H = \lambda_1^{-1} H_1$ et $A = \mu (\lambda_1 A_1 + U_1)$ ($\mu \neq 0$) pour avoir $[H, A] = A$ et comme $f([H, A]) \neq 0$ (car sinon on aurait $f([H, a]) = 0$ et $H \in h_0$), on peut choisir μ de telle sorte que $f(A) = 1$.

La deuxième assertion de (2) découle du fait que h' et h_0 sont des idéaux de k .

Montrons (3). Comme $H \in h$, on a

$$(\exp x H) \cdot f_v \in f + h^\perp,$$

donc

$$(\exp x H) \cdot f_v = f_{v'}, \quad \text{avec} \quad v' = (\exp x H \cdot f_v)(A) = e^{-x} v.$$

D'autre part,

$$h' \in S(f_v; k), \quad \text{car} \quad [h', h'] \subset [h_0, h_0] + [h_0, a] \subset h$$

et, par conséquent,

$$f_v[h', h'] = f[h', h'] = 0,$$

Si $v \neq 0$,

$$k \notin S(f_v; k), \quad \text{car} \quad f_v([H, A]) = f_v(A) = v,$$

et, par conséquent, $h' \in M(f_v; k)$.

On a

$$k = h + a \quad \text{et donc} \quad [k, k] \subset [h, h] + [h, a].$$

Écrivons

$$a = \mathfrak{z} \cap a \oplus \mathbf{R}A, \quad \text{alors} \quad [h, a] = [h, \mathbf{R}A] = [h_0, a] \oplus \mathbf{R}A.$$

Il vient

$$[k, k] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] + \mathbf{R}\mathbf{A}.$$

Comme $f_0 \in f + \mathfrak{h}^\perp$, que $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et que $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$, ainsi que $f[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}]$, on en déduit que

$$f_0[k, k] = f_0(\mathbf{R}\mathbf{A}) = \{0\}.$$

Démontrons le (4). La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo $\mathbf{H}$ et vérifiant

$$(R.3) \quad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \quad (k \in \mathbf{K}, h \in \mathbf{H}).$$

Notons que $\Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}_0$, car $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$ et que $\delta(\exp \mathbf{H}) = 1$, puisque $[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = \mathbf{A}$.

De même, la représentation $\rho(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$ se réalise dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo $\mathbf{H}'$ et vérifiant

$$(R.3, \nu) \quad \psi(kh') = \chi_{f_\nu, \mathfrak{h}'}(h')^{-1} \psi(k)$$

(on a $\Delta_{\mathbf{H}', \mathbf{K}} = 1$ puisque $\mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathbf{k}$).

De façon analogue à la démonstration du (3) de la proposition 9, on considère si $k \in \mathbf{K}$ et si ψ est une fonction continue à support compact modulo $\mathbf{H}$ de l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ la fonction sur $\mathbf{H}'$,

$$\Phi_{k, \psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h').$$

Les groupes $\mathbf{K}/\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}'/\mathbf{H}_0$ étant canoniquement isomorphes on en déduit que $\Phi_{k, \psi}$ est à support compact modulo $\mathbf{H}_0$ et puisque $\Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ est trivial sur $\mathfrak{h}_0$ et que f_ν et f coïncident sur $\mathfrak{h}_0$, $\Phi_{k, \psi}$ est invariante à droite par le sous-groupe distingué $\mathbf{H}_0$ de $\mathbf{H}'$. On pose alors

$$(T_\nu \psi)(k) = \int_{\mathbf{H}'/\mathbf{H}_0} \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h') dh',$$

où dh' désigne la mesure sur $\mathbf{H}'/\mathbf{H}_0$ invariante par les translations à gauche par $\mathbf{H}'$.

Il est clair que T_ν commute aux translations à gauche par les éléments de $\mathbf{K}$ et que $T_\nu \psi$ vérifie la relation (R.3, ν).

On se propose de montrer que $T_\nu \psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$ et que l'opérateur T_ν défini sur l'espace des fonctions continues à support compact modulo $\mathbf{H}$ appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ dans $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$.

L'application $(y, H_0) \rightarrow \exp y A \exp H_0$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0$ sur H' ; on a donc

$$(T_\nu \psi)(k) = \int_{\mathbf{R}} \psi(k \exp y A) e^{iy\nu} dy.$$

De même, le difféomorphisme $(y, H) \rightarrow \exp y A \exp H$ permet d'identifier $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R , où $(R\psi)(y) = \psi(\exp y A)$, si ψ est une fonction continue de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$. Pareillement, $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$ s'identifie à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R' ou $(R'\psi')(x) = \psi'(\exp x H)$.

Posons, de même,

$$R'(T_\nu \psi)(x) = (T_\nu \psi)(\exp x H),$$

on obtient alors, si Φ est une fonction continue à support compact sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} R' \cdot T_\nu \cdot R^{-1}(\Phi) &= \int_{\mathbf{R}} (R^{-1}\Phi)(\exp x H \exp y A) e^{iy\nu} dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} R^{-1}\Phi(\exp y e^x A) e^{-ixf(H)} e^{\frac{x}{2}} e^{iy\nu} dy \\ &= e^{\frac{\nu}{2}} e^{-ixf(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{iy\nu} \Phi(y e^x) dy \\ &= e^{-\frac{x}{2}} e^{-ixf(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{ie^{-x\nu}y} \Phi(y) dy \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$; il vient

$$R' \cdot T_\nu \cdot R^{-1}(\Phi)(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{-ixf(H)} (\mathcal{F}\Phi)(e^{-x\nu}).$$

Ceci montre que $(R' \cdot T_\nu \cdot R^{-1})(\Phi) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, et donc que si $\psi = R^{-1}\Phi$, que $T_\nu \psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$.

Soit $\mathcal{L}_+^2(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$] l'espace formé des fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout hors de $\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_-$), alors si ν est > 0 (resp. < 0), $|\nu|^{\frac{1}{2}} F_\nu$ réalise un isomorphisme unitaire de $\mathcal{L}_+^2(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$] sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Connu $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) = \mathcal{L}_+^2(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$ il en résulte (4) et la proposition 9 est démontrée.

Remarquons que les résultats des propositions 9 et 10 concernant la comparaison des représentations $\varphi(f; \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ et $\varphi(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathbf{k})$ ont été obtenues sans étude précise de la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, mais en construisant directement un opérateur d'équivalence. Ce genre de raisonnement légèrement amélioré conduit à une démonstration plus rapide des résultats de la thèse de Bernat (voir [12]).

IV. — Étude de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.

On rappelle que dans tout ce chapitre $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

On note $I(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$ telles que la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ soit irréductible.

On utilisera les résultats suivants de la thèse de Bernat [1].

B.1. Quelle que soit $f \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$I(f; \mathfrak{g}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I(f; \mathfrak{g}) \subset M(f, \mathfrak{g}).$$

B.2. Si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2 \in I(f; \mathfrak{g})$, alors les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$ sont équivalentes.

On notera $\rho(f; \mathfrak{g})$ la classe de représentations irréductibles associée à f , c'est-à-dire

$$\rho(f; \mathfrak{g}) = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g}).$$

Il est clair que si $g \in G$, alors

$$\rho(g \cdot f; \mathfrak{g}) = \rho(f; \mathfrak{g});$$

on peut donc associer à toute orbite O du groupe G dans $\mathfrak{g}^*$ une classe de représentations unitaires irréductibles du groupe G qu'on notera $\rho(O)$ défini par

$$\rho(O) = \rho(f; \mathfrak{g}) \quad \text{si} \quad f \in O.$$

B.3. L'application $O \rightarrow \rho(O)$ est injective.

Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. On note, comme dans la proposition 4, $U(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui rencontrent $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert non vide de $(f + \mathfrak{h}^\perp)$.

D'autre part, si $\mathfrak{k}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$ et O une orbite, on note $C(O; f; \mathfrak{k})$ le nombre de composantes connexes de $O \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Alors :

- (1) $U(f; \mathfrak{h})$ est un ensemble fini;
- (2) Si $O \in U(f; \mathfrak{h})$, $c(O; f; \mathfrak{h})$ est un nombre fini;
- (3) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{O \in U(f; \mathfrak{h})} C(O; f; \mathfrak{h}) \rho(O)$.

Ce théorème entraînera, en particulier, la caractérisation suivante de l'ensemble $I(f; \mathfrak{g})$.

COROLLAIRE 1 (Critère de Pukanszky [9]). — Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
- (2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$;
- (3) Quelle que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$;
- (4) $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — L'équivalence de (1), (2), (3) a déjà été prouvée à la proposition 3.

D'autre part, (4) $\Rightarrow$ (3), car pour tout $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(f + \varphi; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$$

et donc, d'après le résultat B.1 de Bernat, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Enfin, si $\mathfrak{h}$ vérifie (2), la formule (3) du théorème 1 montre que $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(O(f))$.

Remarque. — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, il est bien connu que $I(f; \mathfrak{g}) = M(f; \mathfrak{g})$ et ceci découle d'ailleurs du corollaire ci-dessus, car $H.f$ orbite de f par une représentation unipotente est fermée, et donc égale à $f + \mathfrak{h}^\perp$. Par contre, si $\mathfrak{g}$ est exponentielle, il est connu que $I(f; \mathfrak{g})$ peut être strictement plus petit que $M(f; \mathfrak{g})$. Il suffit pour cela de considérer l'algèbre $\mathfrak{g}_2$ de base H et A avec la relation $[H, A] = A$ et d'appliquer la proposition 10. On donnera, d'autre part, à la fin de cet article un exemple d'une représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ égale à la somme de deux fois la représentation $\rho(f)$.

Rappelons un théorème de Mackey [7].

THÉORÈME DE MACKEY. — Soit G un groupe de Lie et $A \subset G$ un sous-groupe abélien fermé invariant de G . Soit χ un caractère de A et K le stabilisateur de χ dans G , c'est-à-dire

$$K = \{g \in G; \chi(gag^{-1}) = \chi(a) \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Si U est une représentation unitaire irréductible de K dont la restriction à A soit un multiple de χ , alors $\text{Ind}_K^G U$ est irréductible et si U' est une autre représentation irréductible de K dont la restriction à A soit un multiple de χ , alors $\text{Ind}_K^G U \simeq \text{Ind}_K^G U'$ si et seulement si U est équivalente à U' .

LEMME 8. — Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et α un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, alors si $\mathfrak{h} \in I(f; \alpha')$, alors la restriction de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \alpha')$ à $\exp \alpha$ est un multiple de $\chi_{f, \alpha}$ et $I(f; \alpha') \subset I(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — Le stabilisateur du caractère $\chi_{f, \mathfrak{a}}$ du groupe $\exp \mathfrak{a} = \Lambda$ est le groupe $\Lambda^f = \exp \mathfrak{a}^f$, car il est connexe (Pukanzky [8] ou voir [12]) et a évidemment comme algèbre de Lie $\mathfrak{a}^f$.

Si $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{a}^f)$, $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{a}^f)$ et, par conséquent, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ puisque

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{a}^f),$$

$\rho = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$ se réalise donc par translation à gauche dans l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$ complété de l'espace des fonctions $\psi: \Lambda^f \rightarrow \mathbf{C}$ continues à support compact modulo H et telles que

$$\psi(gh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, \Lambda^f}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(g) \quad (g \in \Lambda^f, h \in H).$$

Remarquons que la restriction de Δ_{H, Λ^f} à Λ est triviale puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal contenu dans $\mathfrak{h}$.

Or, $\mathfrak{a}$ étant abélien, on a si $X \in \mathfrak{a}^f$ et $A \in \mathfrak{a}$,

$$(\rho(\exp A)\psi)(\exp X) = \psi(\exp -A \exp X) = \psi(\exp X \exp -(\exp -X)A)$$

et

$$(\exp -X).A = A - [X, A], \quad \text{or } f[X, A] = 0 \quad \text{puisque } X \in \mathfrak{a}^f.$$

Il vient donc

$$(\rho(\exp A)\psi)(\exp X) = \psi(\exp X \exp -A \exp [X, A]) = e^{if(A)} \psi(\exp X),$$

on a donc prouvé la 1^{re} partie.

Donc si $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{a}^f)$ d'après le théorème de Mackey, la représentation

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\Lambda^f}^G \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$$

est irréductible et il s'ensuit que $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g})$.

Passons à la démonstration du théorème 1.

On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, compte tenu de la proposition 4, on est ramené à vérifier que :

(A) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est somme finie de représentations irréductibles.

(B) Toute représentation intervenant effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est de la forme $\rho(f + \varphi)$, avec $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

(C) Toute représentation associée à une forme $f + \varphi$ ou $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$ intervient dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et avec une multiplicité égale à $c(O(f + \varphi), f, \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, nombre de composantes connexes de l'ouvert $O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp$.

On se trouve toujours dans l'un des deux cas suivants :

I. Il existe un idéal abélien $\neq \{0\}$ sur lequel f s'annule.

II. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{g}$;

En effet, si on n'est pas dans le cas II, alors $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) = 0$ et f s'annule sur l'idéal abélien non nul $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$.

I. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien $\neq \{0\}$ sur lequel f s'annule, alors $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} \in S(f; \mathfrak{g})$, donc $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$. Soient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $\pi : G \rightarrow G/A$ et $p : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ les applications canoniques, $\tilde{f}$ l'image de f dans $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ et $\tilde{\mathfrak{h}} = p(\mathfrak{h})$. Alors

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

Comme $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{g}})$, par hypothèse de récurrence, on a

$$\rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \\ \tilde{\varphi} \in V(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}})$$

et, par conséquent,

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \\ \tilde{\varphi} \in V(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

ce qui démontre (A).

Posons $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$, on a

$$\rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi = \rho(O(f + \varphi))$$

et si $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (B).

Enfin si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, $\varphi \supset \mathfrak{a}^\perp$ et si $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ est telle que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$,

$$\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}).$$

De plus, la bijection canonique $i : \mathfrak{a}^\perp \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}^*$ induit un homéomorphisme entre

$$O(f + \varphi; \mathfrak{g}) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \quad \text{et} \quad O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}) \cap (\tilde{f} + \mathfrak{h}\tilde{\mathfrak{I}}),$$

ce qui démontre (C).

II. On note $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et on suppose que $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{g}$.

II.a. Supposons d'abord que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, on a alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}' \subsetneq \mathfrak{g}$.

Notons $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ l'application de restriction $\mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{a}')^*$.

On a évidemment

$$h \in M(\bar{f}; \mathfrak{a}') \quad \text{et} \quad \rho(f; h; \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(\bar{f}; h; \mathfrak{a}').$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\rho(\bar{f}; h; \mathfrak{a}') = \bigoplus_{\substack{O(\bar{f} + \bar{\varphi}) \\ \in V(\bar{f}; h; \mathfrak{a}')}} c(O(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; h; \mathfrak{a}') \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$$

et donc

$$\rho(f; h; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\bar{f} + \bar{\varphi}) \\ \in V(\bar{f}; h; \mathfrak{a}')}} c(O(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; h; \mathfrak{a}') \text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}').$$

Soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ un prolongement de $\bar{\varphi} \in h^\perp$, alors $\varphi \in \mathfrak{a}^\perp$, donc $\mathfrak{a}' + \varphi = \mathfrak{a}'$. Du lemme 8, il résulte que

$$\text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}') = \rho(O(f + \varphi); \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (A).

D'autre part, d'après le lemme 1, si $h \in M(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{a}')$, alors $h \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, ce qui démontre (B).

Enfin, soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\varphi \in h^\perp$ et $h \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors $\bar{\varphi} \in h^\perp$ et $h \in M(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{g})$ et, par conséquent, la représentation

$$\rho(O(f + \varphi); \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$$

intervient effectivement dans $\rho(f; h; \mathfrak{g})$. Le théorème de Mackey montre que les représentations $\text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$ sont toutes non équivalentes.

La multiplicité de la représentation $\rho(O(f + \varphi); \mathfrak{g})$ dans $\rho(f; h; \mathfrak{g})$ est donc égale à $c(O(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; h; \mathfrak{a}')$.

Soit $\varphi \in h^\perp$ et considérons l'application de restriction $r: \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{a}')^*$, alors

$$r((O(f + \varphi)) \cap (f + h^\perp)) = O(\bar{f} + \bar{\varphi}) \cap (\bar{f} + h^\perp)$$

et $O(f + \varphi) \cap (f + h^\perp)$ est l'image réciproque de sa projection.

En effet, soit $f + \varphi' \in (f + h^\perp) \cap O(f + \varphi)$, alors

$$\rho(O(f + \varphi')) = \rho(O(f + \varphi)) = \text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}'); \mathfrak{a}') = \text{Ind}_{\Lambda f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}').$$

D'après le théorème de Mackey et le résultat B.3 de Bernat, il en résulte que $\bar{f} + \bar{\varphi}' \in O(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{a}')$.

Réciproquement, soit $\bar{f} + \bar{\varphi}' \in (\bar{f} + \mathfrak{h}^\perp) \cap O(\bar{f} + \bar{\varphi})$ et soit $\varphi' \in \mathfrak{h}^\perp$ un prolongement quelconque de $\bar{\varphi}'$. On a alors

$$\text{Ind}_{\Delta f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}'); \mathfrak{a}') = \text{Ind}_{\Delta f}^G \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}') = \rho(O(f + \varphi'); \mathfrak{g}) = \rho(O(f + \varphi); \mathfrak{g}),$$

ce qui prouve que $f + \varphi' \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ d'après B.3.

On a donc, quelle que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$,

$$c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = c(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}'),$$

ce qui prouve (C).

On suppose désormais que $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{h}$; on pose $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et on note $\mathfrak{i}$ le noyau de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. On distinguera les deux cas $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i} = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i} \neq \mathfrak{h}$.

II. b. Supposons $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i} = \mathfrak{h}$.

Choisissons $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$ comme dans la proposition 9. On a alors

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}_0, \quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{v} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

De plus, B_f met en dualité $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$ et les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$ sont équivalentes. Comme $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{a}$ d'après le cas α , on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(f + \varphi') \\ \in V(f; \mathfrak{h}')}} c(O(f + \varphi'), f, \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(f + \varphi')).$$

Ce qui montre A

Pour montrer (B) il suffit de démontrer que quel que soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$, il existe $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ telle que $f + \varphi \in O(f + \varphi')$.

Comme B_f met en dualité $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$, il existe un élément $V(\varphi') \in \mathfrak{v}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([V(\varphi'), T]) = \varphi'(T) \quad \text{pour tout } T \in \mathfrak{t}.$$

Montrons que $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $f + \mathfrak{k}^\perp$. Comme $V(\varphi') \in \mathfrak{h}'$, $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $f + \mathfrak{h}'^\perp$ et il suffit de démontrer que $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $(f + \mathfrak{t}^\perp)$. Or $\mathfrak{a}$ étant abélien, on a puisque $V(\varphi') \in \mathfrak{a}$

$$\exp - V(\varphi') \cdot T = T - [V(\varphi'), T].$$

Donc

$$\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')(T) = f(T) + \varphi'(T) - f[V(\varphi'), T] = f(T).$$

Pour montrer (C) il suffit de démontrer que si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, il existe $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ telle que $f + \varphi' \in O(f + \varphi)$ et telle que

$$c(O(f + \varphi'); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) = c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}).$$

On procède de manière analogue. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, il existe un élément $T(\varphi) \in \mathfrak{t}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([T(\varphi), V]) = \varphi(V) \quad \text{pour tout } V \in \mathfrak{v}.$$

Alors $(\exp T(\varphi)) \cdot (f + \varphi) \in f + \mathfrak{k}^\perp$. En effet, comme $T(\varphi) \in \mathfrak{h}$,

$$\exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi) \in f + \mathfrak{h}^\perp.$$

D'autre part, comme $[\mathfrak{t}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h}$, on a

$$(\exp -T(\varphi)) \cdot V = V - [T(\varphi), V] + W, \quad \text{où } W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$$

et, par conséquent,

$$(\exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi))(V) = f(V) + \varphi(V) - f([T(\varphi), V]) = f(V).$$

Soit alors R l'application de $f + \mathfrak{h}^\perp$ dans $f + \mathfrak{k}^\perp$ défini par

$$R(f + \varphi) = \exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi)$$

et R' l'application de $f + \mathfrak{h}'^\perp$ dans $f + \mathfrak{k}^\perp$ définie par

$$R'(f + \varphi') = \exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi').$$

Les assertions que nous allons prouver :

(1) Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$ et soit C une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors $R(C)$ est une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ et l'application $C \rightarrow R(C)$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

(2) Soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ et telle que $\mathfrak{h}' \in M(f + \varphi'; \mathfrak{g})$ et soit C' une composante connexe de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp)$. Alors $R'(C')$ est une composante connexe de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ et l'application $C' \rightarrow R'(C')$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp)$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$, entraîneront alors (C).

En effet, si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors

$$R(f + \varphi) \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \in M(R(f + \varphi), \mathfrak{g}).$$

Par conséquent, la représentation $\rho(O(f + \varphi))$ apparaît effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ avec une multiplicité égale à $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$.

(2) dit que $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$ est égal au nombre de composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

(1) dit que $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est aussi égal au nombre de composants connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

On aura donc l'égalité cherchée

$$C(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}).$$

Démontrons, par exemple, (1) [(2) se démontrerait exactement de la même manière].

Sur $f + \mathfrak{k}^\perp$, l'application R est l'identité [on a $T(\varphi) = 0$].

Si C est une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, C est stable par le groupe H ; par conséquent,

$$R(C) \subset C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp) \quad \text{et donc} \quad R(C) = C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$$

est un ouvert connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$. Comme

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp) = \bigcup C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp),$$

$$C \in \text{composantes connexes de } O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp),$$

ceci prouve bien (1) et le cas II.b est traité.

II.c. On suppose désormais que $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i} \neq \mathfrak{h}$.

On est donc dans la situation de la proposition 10 dont on reprend les notations. Rappelons que si ν_+ (resp. ν_-) est un nombre réel strictement positif (resp. négatif), on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) = \rho(f_{\nu+}; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) \oplus \rho(f_{\nu-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}).$$

Donc si l'on note $\tilde{f}_{\nu+}$ (resp. $\tilde{f}_{\nu-}$) une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant $f_{\nu+}$ (resp. $f_{\nu-}$), on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \oplus \rho(\tilde{f}_{\nu-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}).$$

Comme $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{a}$, on pourra se ramener à la situation du II.a, si on peut choisir ν^+ et ν^- et $\tilde{f}_{\nu^+}$ et $\tilde{f}_{\nu^-}$ de sorte que $\mathfrak{h}' \in M(\tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{g}) \cap M(\tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{g})$ (on a bien $\mathfrak{a}^{\tilde{f}_\nu} \neq 0$, si $\nu \neq 0$, car $\tilde{f}_\nu([H, A]) = \nu \neq 0$. Or un tel choix est possible. Soit, en effet, $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Identifions $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{m}^*$, la variété linéaire $f + \mathfrak{h}^\perp$ s'identifie alors à $\mathbf{R} \times \mathfrak{m}^*$ par l'application $\tilde{f}_\nu \rightarrow (\nu, \tilde{f}_\nu | \mathfrak{m})$. Comme $\mathfrak{h}' \in S(\tilde{f}_\nu; \mathfrak{g})$ quel que soit ν et $\tilde{f}_\nu$, l'ensemble des couples $(\nu, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathfrak{m}^*$ tel que $\mathfrak{h}' \in M(f_\nu + \varphi; \mathfrak{g})$ est un ouvert de Zariski non vide car $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$, il est donc dense, ce qui établit notre assertion.

Supposons donc que $\mathfrak{h}' \in M(f_{\nu+}; \mathfrak{g}) \cap M(\tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{g})$. Alors d'après II.a, on a

$$\begin{aligned} \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = & \bigoplus_{\substack{0(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi') \\ \in V(\tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{h}')}} c(O(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi'); \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi')) \\ & \bigoplus_{\substack{0(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi') \\ \in V(\tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{h}')}} \bigoplus c(O(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi'); \tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi')) \end{aligned}$$

ce qui montre (A).

Pour montrer (B) il suffit de montrer que quelque soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ et $\nu \neq 0$, il existe $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ tel que

$$f + \varphi \in O(\tilde{f}_\nu + \varphi').$$

En effet, soit $a(\varphi')$ le nombre réel tel que

$$\tilde{f}_\nu([a(\varphi') \Lambda, \Pi]) = \varphi'(H), \quad \text{c'est-à-dire} \quad a(\varphi') = -\frac{\varphi'(H)}{\nu},$$

alors

$$(\exp -a(\varphi') \Lambda) \cdot H = H - [a(\varphi') \Lambda, \Pi]$$

et

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp, \quad \text{car} \quad \Lambda \in \mathfrak{h}'$$

et

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi')(H) = f(H) + \varphi'(H) - \tilde{f}_\nu[a(\varphi') \Lambda, H] = f(H),$$

donc

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp \subset f + \mathfrak{h}^\perp.$$

On note R'_ν l'application de $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp$ dans $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp$ définie par

$$(R'_\nu)(\tilde{f}_\nu + \varphi') = \exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi')$$

et on remarque comme précédemment que si $\varphi'_0 \in \mathfrak{h}'^\perp$ est telle que $\mathfrak{h}' \in M(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0)$, et si C' est une composante connexe de

$$O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp), \quad \text{alors} \quad R'_\nu(C') = C' \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp)$$

et que, par conséquent, R'_ν réalise une bijection entre les composantes connexes de $O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp)$ et celles de $O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp)$ et donc que

$$c(O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu; \mathfrak{h}') = c(O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu; \mathfrak{k}).$$

Démontrons (C).

Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors d'après la formule de la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, la multiplicité de la représentation $\rho(O(f + \varphi))$ est égale à

$$c(O(f + \varphi), f_+; \mathfrak{h}') + c(O(f + \varphi), \tilde{f}_-; \mathfrak{h}').$$

Soit

$$\begin{aligned} (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ &= \{f + l \in f + \mathfrak{h}^\perp \text{ tel que } (f + l)(\Lambda) > 0\}, \\ (f + \mathfrak{h}^\perp)^- &= \{f + l \in f + \mathfrak{h}^\perp \text{ tel que } (f + l)(\Lambda) < 0\}, \end{aligned}$$

alors $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est la réunion de

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ \quad \text{et} \quad O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^-,$$

car si $f + l \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors

$$\mathfrak{h} \in M(f + l; \mathfrak{g}) \quad \text{et donc} \quad (f + l)(\Lambda) \neq 0,$$

d'après le (3) de la proposition 10.

Chacune des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est alors contenue, soit dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)^+$, soit dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)^-$. On notera $c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h})$ [resp. $c^-(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h})$] le nombre de composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+$ [resp. de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^-$]. Il suffit donc de montrer les égalités

$$\begin{aligned} c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^+}; \mathfrak{h}') \\ &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^+}; \mathfrak{k}) \end{aligned}$$

d'après le résultat précédent.

De même,

$$\begin{aligned} c^-(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^-}; \mathfrak{h}') \\ &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^-}; \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

Démontrons que $c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) = c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^+}; \mathfrak{k})$.

Soit $f + l \in (f + \mathfrak{h}^\perp)^+$, il existe un nombre $x(l)$ défini de manière unique par la condition

$$\exp(x(l)H)(f + l) \in (\tilde{f}_{v^+} + \mathfrak{k}^\perp);$$

en effet, comme $\exp(x(l)H)(f + l) \in \tilde{f}_{v^+} + \mathfrak{h}^\perp$, il suffit que

$$\exp(x(l)H)(f + l)(\Lambda) = v^+.$$

Or ceci donne la condition $e^{-x(l)} = \frac{v^+}{(f + l)(\Lambda)}$.

L'application

$$R^+ : (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ \rightarrow (\tilde{f}_{v^+} + \mathfrak{k}^\perp) \subset f + \mathfrak{h}^\perp$$

définie par $R^+(f + l) = \exp(x(l)H)(f + l)$ est telle que si C^+ est une composante connexe de

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+, \quad R^+(C^+) = C^+ \cap (\tilde{f}_{v^+} + \mathfrak{k}^\perp).$$

On voit donc que

$$c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) = c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{v^+}; \mathfrak{k})$$

ce qui démontre (C).

La démonstration du théorème 1 est donc terminée.

V. — Un exemple.

L'exemple suivant montre que la multiplicité des représentations intervenant donc $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ peut être strictement supérieure à 1.

Considérons l'algèbre résoluble exponentielle (complètement résoluble sur $\mathbf{R}$) de dimension 5 définie sur la base (h, x, h_0, a, z) par les crochets

$$\begin{aligned} [h, x] &= -x, & [h, h_0] &= 2h_0, & [h, a] &= a, \\ [x, h_0] &= a, & [x, a] &= z. \end{aligned}$$

(Les crochets non écrits étant nuls, ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation.)

Soit $f = a^* + z^*$, alors $\mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}z$.

Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{R}h_0 + \mathbf{R}h + \mathbf{R}z$, alors $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(f; \mathfrak{g})$.

Le plan $f + \mathfrak{h}^\perp$ est l'ensemble des formes $\lambda a^* + z^* + \mu x^*$.

Nous allons montrer que

$$O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0 \},$$

ce qui montrera que l'ouvert $O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ a deux composantes connexes et que, de plus, $O(f)$ est la seule orbite rencontrant $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert.

D'après le théorème, on aura donc

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = 2\rho(O(f)).$$

Notons f_{-1} la forme $-a^* + z^*$, f_1 la forme f et H le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Remarquons que $O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \subset \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0 \}$, car on a

$$\mathfrak{g}(\lambda a^* + z^* + \mu x^*) = \mathbf{R}z \quad \text{si et seulement si } \lambda \neq 0.$$

Il suffit donc de prouver que :

- (a) $f_{-1} \in O(f_1)$;
- (b) $H.f_1 = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda > 0 \}$,
 $H.f_{-1} = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda < 0 \}$.

Prouvons (a). On calcule facilement que

$$(\exp tx)f_1 = \left(t + \frac{t^2}{2} \right) h_0^* + (1+t)a^* + z^*,$$

par conséquent, si $t = -2$,

$$(\exp -2x)f_1 = f_{-1}.$$

Prouvons (b) Tout élément du groupe H peut s'écrire d'une manière et d'une seule $\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z$.

Des formules

$$\begin{aligned} (\exp -\beta h_0 \exp -\alpha h)(x) &= e^\alpha (x + \beta a), \\ (\exp -\beta h_0 \exp -\alpha h)(a) &= e^{-\alpha} a. \end{aligned}$$

on déduit que

$$(\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z)(f_1) = e^{-\alpha} a^* + z^* + \beta e^\alpha x^*$$

et

$$(\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z)f_{-1} = -e^{-\alpha} a^* + z^* - \beta e^\alpha x^*,$$

d'où découle évidemment (b).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. BERNAT, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 82, 1965, p. 37-99).
- [2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Hermann, Paris, 1963, chap. 7.
- [3] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, t. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [4] J. DIXMIER, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles* (Bull. Soc. math. Fr., t. 85, 1957, p. 113-121).
- [5] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie Groups*, Holden-Day, Amsterdam, 1965.
- [6] A. A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (Uspekhi Math. Nauk, t. 17, p. 57-110, en russe).
- [7] G. W. MACKEY, *Unitary representations of groupe extensions* (Acta Math., t. 99, 1958, p. 265-311).
- [8] L. PUKANSZKY, *On the unitary representations of exponential groups* (J. Funct. Anal., t. 2, 1968, p. 73-113).
- [9] L. PUKANSZKY, *On the theory of exponential groups* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 126, 1967, p. 487-507).
- [10] L. PUKANSZKY, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [11] M. VERGNE, *Sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle* (C. R. Acad. Sc., t. 270, série A, 1970, p. 1405-1407).
- [12] *Représentations des groupes de Lie résolubles* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 28 septembre 1970.)

Michèle VERGNE,
11, rue Quatrefages,
75-Paris, 5^e.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55

181015-70
